

١٥. معادلة فوكس :

إذا كانت جميع النقاط الشاذة للمعادلة التفاضلية:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad [1]$$

هي نقاط شاذة نظامية وكانت نقطة اللا نهاية ($z = \infty$) على الأخر نقطة شاذة نظامية فإننا نسمي المعادلة [1] بمعادلة معادلة فوكس

مثال: فالمعادلة التالية :

$$z^2(1-z)^2w'' + z(1-z^3)w' + (1-z^2)w = 0 \quad [2]$$

هي معادلة فوكس لأن النقط الشاذة المنفصلة لها هي: $[z=0, z=1]$ لا شاذة ذلك وكل من هاتين النقطتين هي نقطة شاذة نظامية. اعتبر ذلك.

أما $z = \infty$ فهي غير من الرتبة الأولى لـ $p(z)$ وهي غير من الرتبة الثانية لـ $q(z)$ (لاحظ ذلك) [لاحظ ذلك بعد التفسير] أمثال w'' هي! إذن نقطة شاذة نظامية أيضاً للمعادلة.

١-6. معادلة فوكس ذات نقطة شاذة واحدة:

عندما يكون للمعادلة [1] نقطة شاذة واحدة هي a بالعرف عندئذ يكون (بالعرف) بالشكل:

$$\left[p(z) = \frac{A}{z-a}, q(z) = \frac{B}{z-a} + \frac{C}{(z-a)^2} \right] \quad [3]$$

وأمثلاً إلى تعريف $p(z), q(z)$ في معادلة فوكس فإنه من الواجب أن يكون هنا $B=0$ [لتتحقق شرط النقطة الشاذة النظامية]

وبالتالي المعادلة (4) في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{C}{(z-a)^2} w = 0 \quad (4)$$

وبما أنه ينبغي أن تكون نقطة اللامتناهية نقطة مفردة منتظمة بالتعريف فيجب أن نؤولها إلى نقطة عادية لكي تكون للمعادلة نقطة مفردة واحدة فقط.

من أجل ذلك يجب أن يتحقق الشرط: $2K \rightarrow 2$

$$2 \rightarrow \infty$$

وإذاً تكون نقطة اللامتناهية $z = \infty$ مفردة منتظمة الرتبة الخامسة كما لا بد من ذلك $9(2)$ ويمكن صياغة المعادلة $[A=2, C=0]$ والمعادلة تأخذ الشكل التالي: $w'' + \frac{2}{z-a} w' = 0$ وهي معادلة فوكس ذات نقطة مفردة منتظمة واحدة.

وهل هذه المعادلة $9(2)$ $w' = -\frac{C_1}{z-a} + C_2$ حيث C_1, C_2 ثابتان اختياريان

2.6 معادلة فوكس بقطبين متماثلين:

المعادلة السابقة (4) هي معادلة فوكس منتظمة متماثلة لها $[z=a, z=\infty]$ وتكون من الشكل:

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{C}{(z-a)^2} w = 0 \quad (4)$$

وتتحول إلى معادلة ذات أمثال ثابتة وذلك بإجراء التحويل التالي $z = b(z-a)$

3.6 معادلة فوكس بالمعادلة فوق الهندسية:

نفس معادلة فوكس بثلاث نقاط مفردة متماثلة معادلة فوكس أو المعادلة فوق الهندسية رتبة النفاذ الشاذة الهندسية هي $(0, 1, \infty)$ وهي من الشكل (معادلة فوكس)

$$2(z-1)w'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)z]w' + \alpha\beta w = 0 \quad (5)$$

Subject:

Date:



والجاءت من حل لهذه المعادلة في جوار النقطة الساكنة التالية:

من أجل ذلك نضرب u في الشكل (مبايع)

$$[u = z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda}] ; c_0 \neq 0$$

نضرب هذه العلاقة الأخيرة مرتين بالنسبة z ونحول في (5)

فحول تلك العلاقة التالية:

$$(z^2 - z) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda-2} + (-\delta + (1+\alpha+\beta)z) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

ومن ملاحظة [توزيع المتغيرات] إلى داخل المصاحف:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda-1} - \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + (1+\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

$$- \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + (1+\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

وهنا بالتجميع للحدود ومساوية قوى z :

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (1+\alpha+\beta)(n+\lambda) + \alpha\beta] c_n z^{n+\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) - \delta(n+\lambda)] c_n z^{n+\lambda-1} = 0$$

(*)

والآن للإيجاد المعادلة المميزة للمشتق نضرب أفعال أقل قوة z تساوي الصفر (عندما $n=0$) فنحصل على المعادلة:

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1) + \delta\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \delta\lambda = 0 \quad \text{و} \quad c_0 \neq 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \delta\lambda = 0 \quad \text{أو} \quad \lambda(\lambda - \delta - 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 - \delta \end{array} \right\} \quad \text{أو} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 - \delta \end{array} \right\}$$

[أي ما دام المشتق بين λ_1 و λ_2 ليس عدداً صحيحاً]

ولإيجاد القانون التوريثي نضرب في المجموع الثاني (A) كلا n و $(n+1)$ فنجد من جديد:

3

Subject:

Date:



$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (1+\alpha+\beta)(n+\lambda) + \alpha\beta] C_n Z^{n+\lambda}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\lambda+1)(n+\lambda) + \delta(n+\lambda+1)] C_{n+1} Z^{n+\lambda} = 0$$

دالات بالمطابقة وجعل اعداد $Z^{n+\lambda}$ مساوية للصفر نجد

$$C_{n+1} = \frac{(n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+\delta)} C_n \quad \text{--- (I)} \quad ; \quad \forall n \geq 0$$

ملاحظة: بينما $n = -1$ يمكن اعادة لانه موجود في اضافة المتسلسلة للمنتج.

الا λ ما أبدا $\lambda = 0$ نجد الدستور التوافقي الموافق لـ $\lambda = 0$.

$$\text{--- (I)} \Rightarrow C_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\delta)} C_n \quad ; \quad \forall n \geq 0$$

والذي تعبر التواتر كما يلي وفي هذا الدستور التوافقي لـ $\lambda = 0$.

$$n=0 \Rightarrow C_1 = \frac{\alpha\beta}{\delta} C_0$$

$$n=1 \Rightarrow C_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\delta(\delta+1)} C_0$$

ومما

$$n=n-1 \Rightarrow C_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \delta(\delta+1) \dots (\delta+n-1)} C_0$$

ومما التالي:

$$C_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\delta)_n} C_0$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$$

حيث

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)$$

4

Subject:

Date:

$$(x)_n = x(x+1) \dots (x+n-1)$$

و x لا يساوي الا صفر اذ أي عدد مجموع سالب ومقتدر أي
 $a = 0$ نجد ان الحد الموافق لـ 0 ~~هو~~ ~~الحد الاول~~ هو الحد الاول

$$W_1 = Z^0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n \rightarrow W_1 = 1 + \frac{x\beta}{x} Z + \dots + \frac{(x)_n (x+\beta)_n}{n! (x)_n} Z^n \quad (*)$$

ونعبر للطرف الايمن من (*) $F(x, \beta, x, Z)$ ويسمى
 من اجل $x_2 = 1-x$ نجد ان الحدود الخارجيه الموائمة هي

$$(*) \Rightarrow C_{n+1} = \frac{(1-x+n+x)(1-x+n+\beta)}{(n+1)(n+2-x)} C_n \quad \forall n \geq 0$$

وبالتالي كما سبق نجد:

$$C_n = \frac{(x-x+1)_n (\beta-x+1)_n}{n! (2-x)_n} C_0$$

وهو يكون الحد التالي للمعادلة ~~(المعادلة الثاني)~~ ونعبر عن x لا يساوي
 أي عدد مجموع موجب أكبر من (2) هو:

$$W_2 = C_1 Z^{1-x} F(x-x+1, \beta-x+1, 2-x, Z)$$

وانجزا اني العام للمعادلة نعرف ان x لا يساوي أي عدد مجموع
 هو:

$$W = C_1 F(x, \beta, x, Z) + C_2 Z^{1-x} F(x-x+1, \beta-x+1, 2-x, Z)$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت اختيارية.

7. معادلة لوجستية التفاضلية:

في الفترة السابقة تناولنا حل معادلة W' بحسب ان الفرق بين W و W'
 المعادلة المعينة لا يساوي أي عدد مجموع.

والآن سنقدم معادلة معادلة W W' ولكي لا يتحقق
 فيها هذا الشرط رعي معادلة لوجستية التفاضلية في

[في الفترة = عدد مجموع]

Subject: _____

Date: _____



حيث n عدد صحيح (1) $(1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0$
 إن النقاط الشاذة لهذه المعادلة (2) هي $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ وهما
 نقاط شاذة منتظمة (3) (غير ذلك).

ولتوجد الحل لهذه المعادلة في مجال المنطقة الشاذة النظامية 1 مع
 متغير ذلك نجرب القبول التالي:

$$w = z^{-1} \Rightarrow \boxed{2-1 = -2t} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2} w' \Rightarrow \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2} w'$$

$$\Rightarrow z = 1-t \Rightarrow z^2 = 1-4t+4t^2$$

وكذلك يكون $w = w_1$ (4) (نك)

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{2} w'$$

$$w'' = \frac{1}{4} w''$$

نقوم بتركيب في المعادلة (1) فنجد:

$$\Rightarrow (4t-4t^2) \frac{1}{4} w'' - 2(1-2t) \left(-\frac{1}{2}\right) w' + n(n+1)w = 0$$

بالاقتضار والاختصار $4t-4t^2 = 1-2t$ المعادلة نجد:

$$t(t-1)w'' + [-1+2t]w' + n(n+1)w = 0 \quad (5)$$

وهي معادلة تجزئية السابقة حيث لا يمكن تبسيطها مع معادلة تجزئية أخرى:

$$[2(z-1)w'' + [-\gamma + (1+\gamma+\beta)z]w' + d\beta w = 0] \quad (5)$$

$$\gamma = 1, \beta = -n, d = 1+n$$

وبالتالي فالمعادلة (1) تقبل حل تجزئي من الشكل:

$$\Rightarrow w_1 = F((1+n), -n, 1, (1-z)) \quad (6)$$

وبما أن $\alpha = 1$ في هذه الحالة فالمعادلة المسيرة للشتت لها جذر غير صحيح

هو الصحيح (7) ولذا فإن الحل الآخر للمعادلة (1) هو مندر قصير (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100) (101) (102) (103) (104) (105) (106) (107) (108) (109) (110) (111) (112) (113) (114) (115) (116) (117) (118) (119) (120) (121) (122) (123) (124) (125) (126) (127) (128) (129) (130) (131) (132) (133) (134) (135) (136) (137) (138) (139) (140) (141) (142) (143) (144) (145) (146) (147) (148) (149) (150) (151) (152) (153) (154) (155) (156) (157) (158) (159) (160) (161) (162) (163) (164) (165) (166) (167) (168) (169) (170) (171) (172) (173) (174) (175) (176) (177) (178) (179) (180) (181) (182) (183) (184) (185) (186) (187) (188) (189) (190) (191) (192) (193) (194) (195) (196) (197) (198) (199) (200) (201) (202) (203) (204) (205) (206) (207) (208) (209) (210) (211) (212) (213) (214) (215) (216) (217) (218) (219) (220) (221) (222) (223) (224) (225) (226) (227) (228) (229) (230) (231) (232) (233) (234) (235) (236) (237) (238) (239) (240) (241) (242) (243) (244) (245) (246) (247) (248) (249) (250) (251) (252) (253) (254) (255) (256) (257) (258) (259) (260) (261) (262) (263) (264) (265) (266) (267) (268) (269) (270) (271) (272) (273) (274) (275) (276) (277) (278) (279) (280) (281) (282) (283) (284) (285) (286) (287) (288) (289) (290) (291) (292) (293) (294) (295) (296) (297) (298) (299) (300) (301) (302) (303) (304) (305) (306) (307) (308) (309) (310) (311) (312) (313) (314) (315) (316) (317) (318) (319) (320) (321) (322) (323) (324) (325) (326) (327) (328) (329) (330) (331) (332) (333) (334) (335) (336) (337) (338) (339) (340) (341) (342) (343) (344) (345) (346) (347) (348) (349) (350) (351) (352) (353) (354) (355) (356) (357) (358) (359) (360) (361) (362) (363) (364) (365) (366) (367) (368) (369) (370) (371) (372) (373) (374) (375) (376) (377) (378) (379) (380) (381) (382) (383) (384) (385) (386) (387) (388) (389) (390) (391) (392) (393) (394) (395) (396) (397) (398) (399) (400) (401) (402) (403) (404) (405) (406) (407) (408) (409) (410) (411) (412) (413) (414) (415) (416) (417) (418) (419) (420) (421) (422) (423) (424) (425) (426) (427) (428) (429) (430) (431) (432) (433) (434) (435) (436) (437) (438) (439) (440) (441) (442) (443) (444) (445) (446) (447) (448) (449) (450) (451) (452) (453) (454) (455) (456) (457) (458) (459) (460) (461) (462) (463) (464) (465) (466) (467) (468) (469) (470) (471) (472) (473) (474) (475) (476) (477) (478) (479) (480) (481) (482) (483) (484) (485) (486) (487) (488) (489) (490) (491) (492) (493) (494) (495) (496) (497) (498) (499) (500) (501) (502) (503) (504) (505) (506) (507) (508) (509) (510) (511) (512) (513) (514) (515) (516) (517) (518) (519) (520) (521) (522) (523) (524) (525) (526) (527) (528) (529) (530) (531) (532) (533) (534) (535) (536) (537) (538) (539) (540) (541) (542) (543) (544) (545) (546) (547) (548) (549) (550) (551) (552) (553) (554) (555) (556) (557) (558) (559) (560) (561) (562) (563) (564) (565) (566) (567) (568) (569) (570) (571) (572) (573) (574) (575) (576) (577) (578) (579) (580) (581) (582) (583) (584) (585) (586) (587) (588) (589) (590) (591) (592) (593) (594) (595) (596) (597) (598) (599) (600) (601) (602) (603) (604) (605) (606) (607) (608) (609) (610) (611) (612) (613) (614) (615) (616) (617) (618) (619) (620) (621) (622) (623) (624) (625) (626) (627) (628) (629) (630) (631) (632) (633) (634) (635) (636) (637) (638) (639) (640) (641) (642) (643) (644) (645) (646) (647) (648) (649) (650) (651) (652) (653) (654) (655) (656) (657) (658) (659) (660) (661) (662) (663) (664) (665) (666) (667) (668) (669) (670) (671) (672) (673) (674) (675) (676) (677) (678) (679) (680) (681) (682) (683) (684) (685) (686) (687) (688) (689) (690) (691) (692) (693) (694) (695) (696) (697) (698) (699) (700) (701) (702) (703) (704) (705) (706) (707) (708) (709) (710) (711) (712) (713) (714) (715) (716) (717) (718) (719) (720) (721) (722) (723) (724) (725) (726) (727) (728) (729) (730) (731) (732) (733) (734) (735) (736) (737)

